積分汎関数に対するVitali型収束定理 (関数空間の深化とその周辺)

河邊, 淳

数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 124-130

積分汎関数に対する Vitali 型収束定理

信州大学工学部　河邊　淳

Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University

1　はじめに

Lebesgue 積分に対する Vitali の収束定理 [13, 19] は，積分の収束定理のなかで最深に位置している．実際，優収束定理や有界収束定理などの他の収束定理は，Vitali の定理から導かれる．本発表では，非加法的測度の積算概念として重要な Choquet，Šipoš，Sugeno，Shilkret 積分がもつ共通的な性質の一つである “摂動性” に着目し，これら非線形積分に対して，Vitali 型の収束定理の成立性を統一的に議論して得られた結果を報告する．

2　非加法的測度と積分汎関数

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合体とする．関数 $f\colon X \to [0,\infty]$ は，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f \geq t\}$，$\{f > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\boldsymbol{\mathcal{A}}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}^+(X)$ で表し，$\mathcal{F}_0^+(X) := \{f \in \mathcal{F}^+(X)\colon f$ は実数値 $\}$ とおく．拡大実数 $a, b \in [-\infty,\infty]$ に対して，$a \vee b := \max\{a,b\}$，$a \wedge b := \min\{a,b\}$ とおく．また，関数 $f, g\colon X \to [-\infty,\infty]$ の最大関数 $f \vee g$ と最小関数 $f \wedge g$ を，それぞれ $(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$，$(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$ $(x \in X)$ で定める．χ_A で集合 A の定義関数を表す．

定義 1　集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$

を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．

非加法的測度は，測度の σ-加法性を，より弱い単調増加性に置き換えて定義された集合関数であり，その積算概念である非線形積分とともに，期待効用理論，決定理論，ゲーム理論，不完全な情報のもとでの数理経済学などの分野に多くの応用をもつ [3, 4, 10].

以下では，$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は**積分汎関数**，すなわち，次の 2 つの条件

(i) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して $I(\mu, 0) = 0$

(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f \leq g$ ならば $I(\mu, f) \leq I(\mu, g)$

を満たすとする．また，各 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して

$$I_\mu(f) := I(\mu, f), \quad f \in \mathcal{F}^+(X)$$

で定まる汎関数 $I_\mu \colon \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ を I が定める **μ-積分汎関数**という．

以下の非線形積分は，非加法的測度論の応用領域でよく利用される積分汎関数で，どれも被積分関数 f の非加法的測度 μ に関する**減少分布関数**

$$G_\mu(f) := \mu(\{f \geq t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

を用いて定義されているので，総称して，**分布型非線形積分**とよばれる．

定義 2　$(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分** [1,14]: $\mathrm{Ch}(\mu, f) := \displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})\, dt$

ただし，右辺の積分は Lebesgue 積分または広義 Riemann 積分である．

(2) **Šipoš 積分** [16]: $\mathrm{Si}(\mu, f) := \displaystyle\lim_{P \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\mu(\{f \geq a_i\})$

ただし，Δ^+ は分割 $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty)$ 全体に集合の包含関係で定まる順序を導入した有向集合である．

(3) **Sugeno 積分** [12,18]: $\mathrm{Su}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \wedge \mu(\{f \geq t\})\bigr]$

(4) **Shilkret 積分** [15,22]: $\mathrm{Sh}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \cdot \mu(\{f \geq t\})\bigr]$

任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して $\mathrm{Ch}(\mu, f) = \mathrm{Si}(\mu, f)$ で，μ が σ-加法的ならば，両積分は抽象 Lebesgue 積分と一致する [16,17]．実際，Šipoš 積分の定義は，非負の単調減少分布関数 $G_\mu(f) = \mu(\{f \geq t\})$ の広義 Riemann 積分の定義の言い換えに他ならない．にもかかわらず，Choquet 積分の他に，Šipoš 積分も考察の対象とすることには意味がある．なぜなら，Šipoš 積分はルベーグ積分や広義 Riemann 積分の概念を用いずに定義できるので，Šipoš 積分に関して以下の章で述べる理論を展開すれば，その特別な場合として，Choquet 積分や抽象 Lebesgue 積分に関する諸性質のうち，少なくとも収束定理に至るまでの結果が得られるからである．

非加法的測度と非線形積分に関する詳細な情報は，[2,5,11,21] などを見よ．

3 積分汎関数の摂動性

この章では，非線形積分の収束定理を統一的に取り扱う際に重要な役割を果たす積分汎関数の“摂動性”の概念を，関連する諸性質と合わせて紹介する．次の定義における集合関数 μ と関数 f の組 (μ, f) の間の支配関係は，数理経済学の分野でよく用いられる **1 次確率優位性** (the first-order stochastic dominance) [9] の一般化である．

定義 3 $\mu, \nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は集合関数，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ とする．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \nu(\{g \geq t\})$$

が成り立つとき，(μ, f) は (ν, g) により**支配される**といい，$(\mu, f) \prec (\nu, g)$ とかく．

定義 4 $\varphi(0) = \lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0$ を満たす関数 $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 全体を Φ で表し，Φ に属する関数を**制御関数**とよぶ．

積分汎関数に関する 以下の諸性質は，非線形積分の収束定理を統一的に議論する際に必要となる．詳細は [6] を見よ．

定義 5 $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数とする．

(1) 関数 $\theta\colon [0, \infty]^2 \to [0, \infty]$ が存在して，任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$r \in [0, \infty]$，$A \in \mathcal{A}$ に対して

$$I(\mu, r\chi_A) = \theta(r, \mu(A))$$

のとき，I は**生成的**，θ を I の**生成器**という．

(2) 各 $p, q > 0$ に対して，制御関数 $\varphi_{p,q}, \psi_{p,q} \in \Phi$ が存在して，次の摂動条件 (P) を満たすとき，I は**摂動的**という:

(P) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$ に対して，$\|f\|_\mu < p$，$\mu(X) < q$，$(\mu, f) \prec (\mu + \delta, g + \varepsilon)$ ならば

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, g) + \varphi_{p,q}(\delta) + \psi_{p,q}(\varepsilon).$$

ただし，$\|f\|_\mu := \inf\{r > 0\colon \mu(\{f > r\}) = 0\}$ は f の μ-本質的ノルムである．

(3) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $c > 0$ に対して

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, f \wedge c) + I(\mu, (f - c)^+)$$

のとき，I は**水平劣加法的**という．上式で等号が成り立つときは**水平加法的**という．

(4) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$I(\mu, f) = \sup_{r>0} I(\mu, f \wedge r)$$

のとき，I は**上縁連続**という．

命題 1 ([6]) $\mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh}\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は生成的かつ摂動的で，生成器は $\theta(a, b) := a \cdot b$ である．一方，$\mathrm{Su}\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は生成的かつ摂動的で，生成器は $\theta(a, b) := a \wedge b$ となる．また，これらの生成器はすべて**極限保存的**，すなわち，任意の $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty]$ と任意の $b \in [0, \infty]$ に対して，すべての $r > 0$ で $\theta(r, b_n) \to \theta(r, b)$ が成り立てば，$b_n \to b$ となる．さらに，上記の 4 種の非線形な積分汎関数はすべて上縁連続で，Ch と Si は水平加法的，Su と Sh は水平劣加法的となる．

4 Vitali の収束定理

以下では，$(X, \mathcal{A})$ は可測空間，$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数とする．

定義 6 $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ は空でないとする．関数族 $\mathcal{F}$ は

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} I\bigl(\mu, \chi_{\{|f|>c\}}|f|\bigr) = 0$$

のとき，I に関して**一様 $\boldsymbol{\mu}$-可積分**という．

定義 7 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$，$f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$$

のとき，f_n は f に **$\boldsymbol{\mu}$-測度収束**するといい，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ で表す．

定理 1 (Vitali の収束定理の原型) ([8]) $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の条件 (i) と (ii) を考える．

(i) μ は**自己連続**，すなわち，任意の $A, B_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば，$\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ かつ $\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$．

(ii) 任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ で，さらに $\{f_n, f\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I_μ に関して**一様切断的**，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $c > 0$ が存在して，$I_\mu(f_n) \le I_\mu(f \wedge c) + \varepsilon$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ $I_\mu(f) \le I_\mu(f \wedge c) + \varepsilon$ ならば，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$．

このとき，以下が成り立つ．

(1) μ は有限とする．I が摂動的ならば (i)⇒(ii) が成り立つ．

(2) I は生成的で，その生成器が極限保存的ならば，(ii)⇒(i) が成り立つ．

定理 1 の一様切断性を一様可積分性で書き直せば，次の Vitali の収束定理が得られる．

定理 2 (Vitali の収束定理) ([8])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の条件 (i) と (ii) を考える．

(i) μ は自己連続．

(ii) I_μ に対して Vitali の収束定理が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 μ-可積分かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，$I_\mu(f) < \infty$ で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$．

このとき，以下が成り立つ．

(1) μ は有限とする．I_μ が上縁連続，水平劣加法的，摂動的で，任意の $r > 0$ に対して $I_\mu(r) < \infty$ ならば，(i)$\Rightarrow$(ii) が成り立つ．

(2) I_μ は生成的で，その生成器が極限保存的ならば，(ii)$\Rightarrow$(i) が成り立つ．

5　個別の非線形積分に対する Vitali 型収束定理

命題 1 より，Choquet 積分，Šipoš 積分，Shilkret 積分は上縁連続，水平 (劣) 加法的，生成的，摂動的である．また，μ が有限のときは，任意の $r > 0$ に対して

$$\mathrm{Ch}_\mu(r) = \mathrm{Si}_\mu(r) = \mathrm{Sh}_\mu(r) = r\mu(X) < \infty$$

となる．よって，定理 2 より次の系が得られる．

系 1 (Vitali の収束定理: Ch, Si, Sh の場合) ([7,8])　$I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh}$ とする．$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は有限かつ自己連続とする．このとき，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 μ-可積分かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，$I_\mu(f) < \infty$ で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$．

一方，Sugeno 積分は摂動的であり，μ が自己連続かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，定数 $c_0 > 0$ と自然数 n_0 が存在して，$\nu := \mu \wedge c_0$ とおくと，$\{f_n \wedge c_0, f \wedge c_0\}_{n \geq n_0}$ は Su_ν に関して一様切断的で，

$$\mathrm{Su}_\mu(f) = \mathrm{Su}_\nu(f \wedge c_0), \quad \mathrm{Su}_\mu(f_n) = \mathrm{Su}_\nu(f_n \wedge c_0) \ \ (n = 1, 2, \ldots)$$

となることが示せる．よって，ν は有限かつ自己連続で，$f_n \wedge c_0 \xrightarrow{\nu} f \wedge c_0$ であることに注意すれば，定理 1 より次の系が得られる．

系 2 (Vitali 型収束定理: Su の場合) ([8, 20])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は自己連続とする．このとき，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば $\mathrm{Su}_\mu(f_n) \to \mathrm{Su}_\mu(f)$．

注意　Sugeno 積分の Vitali 型収束定理である系 2 は，μ が有限でなくても，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

一様 μ-可積分でなくても，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ でありさえすれば成り立つ．一方，Choquet，Šipoš，Shilkret 積分の Vitali の収束定理である系 1 が成立するには，μ の有限性は必要である．実際，$f_n := 1/n\ (n = 1, 2, \ldots)$，$f := 0$ とおくと，$f_n, f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ で，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I に関して一様 μ-可積分かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ となる．よって，系 1 が成り立つとすると，

$$\frac{\mu(X)}{n} = I_\mu(f_n) \to I_\mu(0) = 0$$

となるので，$\mu(X) < \infty$ を得る．

参考文献

[1] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **5**, (1953–54), 131–295.

[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.), Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[4] M. Grabisch, Set functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, Switzerland, 2016.

[5] J. Kawabe, Nonadditive measure and nonlinear integral, Sugaku, **68**, (2016), 266–292 (in Japanese). English translation will be appeared in Sugaku Exposition published by American Mathematical Society.

[6] J. Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets Syst., **304**, (2016), 1–19.

[7] J. Kawabe, The Vitali theorem for the Choquet integral, Linear Nonlinear Anal., **3**, (2017), 349–365.

[8] J. Kawabe, The Vitali convergence theorem for nonlinear integral functionals, in preparation.

[9] H. Levy, Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis, Management Sci., **38**, (1992), 555–593.

[10] K. G. Nishimura and H. Ozaki, Economics of Pessimism and Optimism, Springer, Japan, 2017.

[11] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.

[12] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., **75**, (1980), 562–570.

[13] M. M. Rao, Measure Theory and Integration, second edition, Marcel Dekker, New

York, 2004.

[14] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Amer. Math. Soc., **97**, (1986), 255-261.

[15] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math., **33**, (1971), 109–116.

[16] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, Math. Slovaca, **29**, (1979), 141–155.

[17] J. Šipoš, Non linear integrals, Math. Slovaca, **29**, (1979), 257–270.

[18] M. Sugeno, Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Doctoral Thesis, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.

[19] G. Vitali, Sull'integrazione per serie, Rend. Circ. Mat. Palermo, **23**, (1907), 137–155.

[20] Z. Wang, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., **99**, (1984), 195–218.

[21] Z. Wang and G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.

[22] R. H. Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition, **1**, (1981), 55–72 (in Chinese).

Jun Kawabe
Division of Mathematics and Physics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
jkawabe@shinshu-u.ac.jp